TITLE:

Super minimal surfaces I (Topology and Geometry of Harmonic Maps)

AUTHOR(S):

江尻, 典雄

数理解析研究所講究録
626巻 1987年 30-48

Super minimal surfaces I

都立大学 江尻 典雄 (Ejiri Norio)

目的は Bryant による次の結果の紹介することである。

定理 Mを compact, connected Riemann surface とする。このときMから4次元単位球面 $S^4(1)$ への conformal minimal immersion がある

証明の方針は Penrose fibration を用いて super minimal surface の表現公式を作りその応用として定理を得る。

1. holomorphic quartic form.

Mを compact, connected Riemann surface とする。X をMから $S^4(1)$ への smooth map とする。但し $S^4(1)$ を5次元Euclid空間 R^5 の原点中心の単位球面と見て X を R^5 に値をとると思っている。X が conformal とは

(1.1) $$\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle = 0$$

が成立することであり X が harmonic とは

$$(1.2)\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial \bar{z}} = -\left\langle \frac{\partial X}{\partial z} \overline{\frac{\partial X}{\partial z}} \right\rangle X$$

が成立することである。ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は R^5 の内積を complex linear に拡張し，z は M の complex coordinate とする。今から X を conformal, harmonic とする。つまり X は branched, minimal immersion となる。この時 holomorphic quartic form Q が

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right\rangle dz^4$$

で定義できる。実際容易に (1.1), (1.2)を使って $\langle \partial^2 X/\partial z^2, \partial^2 X/\partial z^2 \rangle$ が holomorphic がわかる。 $Q \equiv 0$ のとき M を <u>super minimal</u> <u>surface</u> と呼ぶ

注 1.1. M が topological sphere S^2 であるときは このような Q は 恒等的に 0となる。

2. Penrose fibration.

R^4の orientationを固定する。(x^1, x^2, x^3, x^4) を oriented orthogonal coordinateとする。J_0を R^4 の orthogonal complex structure として

$$J_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

で定義する $\bigcirc$を 固定したorientation を自然な orientation とする R^4 の orthogonal complex structure 全体とする。この時 SO(4)が $\bigcirc$へ $J \longrightarrow gJg^{-1}$, $g \in SO(4)$

として transitive に作用しその isotropy 群は unitary 群 $U(2)$ に他ならない。したがって O は $SO(4)/U$ と同一視でき $S^2(1)$ となることがわかる。$S^4(1)$ の orientation を1つ固定する。F を $S^4(1)$ の oriented frame bundle とする O への $SO(4)$-作用を使って associated bundle H を作る。この H を $S^4(1)$ の twistor space と呼ぶ。各 fibre は各点 $x \in S^4(1)$ に対して $T_x(S^4(1))$ の orthogonal complex structure 全体となる。但しその自然な orientation は、固定された $S^4(1)$ の orientation となっている。π を H から $S^4(1)$ への projection とする。H には F の connection からきまる horizontal distribution $\mathcal{H}$ がはいる。$\mathcal{V}$ を vertical distribution とする。$\tilde{x} \in H$ に対して

$$T_{\tilde{x}}(H) = \mathcal{H}_{\tilde{x}} + \mathcal{V}_{\tilde{x}}$$

なので同一視 $\mathcal{H}_{\tilde{x}} = T_{\pi(\tilde{x})}(S^4(1))$, $\mathcal{V}_{\tilde{x}} = T_{\tilde{x}}(S^2(1))$ を使って $T_{\tilde{x}}(H)$ に内積を導く さらに $\mathcal{V}_{\tilde{x}}$ は $T_{\tilde{x}}(S^2(1))$ より orthogonal complex structure を持ち 一方 $\tilde{x}$ は $T_{\pi(\tilde{x})}(S^4(1))$ の orthogonal complex structure に他ならないので $\mathcal{H}_{\tilde{x}}$ の orthogonal complex structure を引き起す。このようにして H は almost Hermitian structure をもつ ここまでは oriented 4次元 Riemannian manifold で twistor space が定義できることをいっているが 特に $S^4(1)$ の場合

次の事実が知られている

Fact. H は 3次元複素射影空間 P_3 となる。

実際作り方より $H = SO(5)/U(2)$ となっている。

3. "Gauss map"

M を compact, connected Riemann surface とする。χ を M から $S^4(1)$ への conformal immersion とする. $N(M)$ を normal bundle とする M と $S^4(1)$ の orientation から きまる orientation を $N(M)$ へ与えておく. 各 $x \in M$ に対して $e_1(x)$, $e_3(x)$ を $T_x(M)$ の oriented orthonormal basis として $e_2(x)$, $e_4(x)$ を $N_x(M)$ の oriented orthonormal basis とする M から $P_3(=H)$ への map G を

$$G(x) = (\chi(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x), e_4(x))U(2)$$

で定義する。well defind であることを示すのは容易である。これを "Gauss map" と呼ぶ. $S^4(1)$ の orientation を変えることによって別の "Gauss map" を持つ

注 3.1. $S^4(1)$ のかわりに R^4 を考える. そのとき "Gauss map" は

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & SO(4)/U(2) = S^2(1) \\ \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ x & \longrightarrow & (e_1(x), e_2(x), e_3(x), e_4(x))U(2) \end{array}$$

となる. したがって M から $S^2(1) \times S^2(1)$ への map を得るが これは standard な Gauss map となっていることがわかる。

次の定理は direct calculation によって出る.(c.f. [E-S-2], [Gu-R], [Ej-3])

定理3.1. (1) M が $S^4(1)$ の super minimal surface であるための必要十分条件はどちらかの"Gauss map"が horizontal, holomorphic.

(2) P_3 の horizontal holomorphic map は $S^4(1)$ の super minimal surface を与える。

但し horizontal とは $G_*(TM) \subset \mathcal{H}$ となることである。

注3.2. minimal の場合 branch point があっても "Gauss map" は定義できる。

$S^4(1)$ の minimal surface がいつ super minimal surface となるかということについて次の定理がある。

定理3.2.([E-S-2]) M_g を genus g の compact, connected Riemann surface で $S^4(1)$ へ conformal, minimal に immerse されているとする。もし

$$|\text{self intersection number}| > 2(g-1)$$

なら M_g は super minimal surface となる。

証明. χ をその immersion とする $N^{\mathbb{C}}(M)$ を $N(M)$ の complexification とする。$N(M)$ の normal connection を使って $N^{\mathbb{C}}(M)$ は holomorphic structure をもつ.(c.f. [E-W-4])

β を χ の second fundamental form とする

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right)dz^2$$

は $N^{\mathbb{C}}(M)$に値をとるformとなる。Codazzi equationより これはholomophicになる。$G(x)$は $N(M)$のorthogonal complex structure J''を導いている. つまり $J''e_2 = e_4$, $J''e_4 = -e_2$である(先ほど述べなかったが Mのorthogonal complex structure J' を使えば $G(x) = J' + J''$に他ならない). J''は $N(M)$のnormal connection で平行となることがわかる。そこでJ''をつかって $N^{\mathbb{C}}(M)$を (1,0)-type $N^{1,0}(M)$と (0,1)-type $N^{0,1}(M)$のsubbundleに分解することができて holomorphic subbundle となっていることがわかる。$N(M)$のmetricを使って $N^{0,1}(M)$は$N^{1,0}(M)$のdual spaceとなるので $N^{0,1}(M)$, $N^{1,0}(M)$のChern number $c_1(N^{0,1}(M))$, $c_1(N^{1,0}(M))$ について

(3.1) $\qquad c_1(N^{1,0}(M)) + c_1(N^{0,1}(M)) = 0$

を得る。さて $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$の (1,0)-part, (0,1)-part をそれぞれ $\sigma^{1,0}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\sigma^{0,1}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$とすると $N^{1,0}(M)$, $N^{0,1}(M)$に値をとるform

$$\sigma^{1,0}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right)dz^2, \quad \sigma^{0,1}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right)dz^2$$

が定義できる。さてどちらも消えていないとする。このとき

$$c_1(N^{1,0}\otimes\{dz\}^2) \geq 0, \quad c_1(N^{0,1}\otimes\{dz\}^2) \geq 0$$

となるので $c_1(N^{1,0}) \geq 4(1-g)$, $c_1(N^{0,1}) \geq 4(1-g)$を得る。

(3.1)より $|c_1(N^{1,0})| \leq 4|1-g|$ となる。しかるに $c_1(N^{1,0})$ は self intersection の2倍であるので仮定より矛盾となる。ゆえに $\sigma^{1,0}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}) \equiv 0$ or $\sigma^{0,1}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}) \equiv 0$ となる。したがって $\langle \sigma(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}), \sigma(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}) \rangle \equiv 0$ が成立する。これは $Q \equiv 0$ を示している ▨

注 3.3 self intersection number は regularly homotopy class と対応している。一般に各 regularly homotopy class に minimal surface があるとはかぎらない 実際 S^2 から $S^4(1)$ への |self intersection number| = 1 となる regularly homotopy class は minimal immersion を持たないが他の class については Barbosa の例を使って minimal immersion があることがわかっている。

4. horizontal distribution と表現公式

目的は P_3 の horizontal distribution $\mathcal{H}$ を 具体的にあらわすことである。

(z_0, z_1, z_2, z_3) を P_3 の homogeneous coordinate とする A を open set $\{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in P_3 \mid z_0 \neq 0\}$ とする z_1, z_2, z_3 を P_3 の coordinate として次が成立する

補題 A上 $\mathcal{H}$ は holomorphic 1-form

$$\omega = dZ_1 - Z_3 dZ_2 + Z_2 dZ_3$$

で定義される。

この補題を使って superminimal surface の表現公式を得る。

定理4.1([Br-2]). M を compact, connected Riemann surface とする。f と g を M上の meromorphic functions とする. g は定数でないとする. M から P_3 への map $\Phi(f,g)$ を

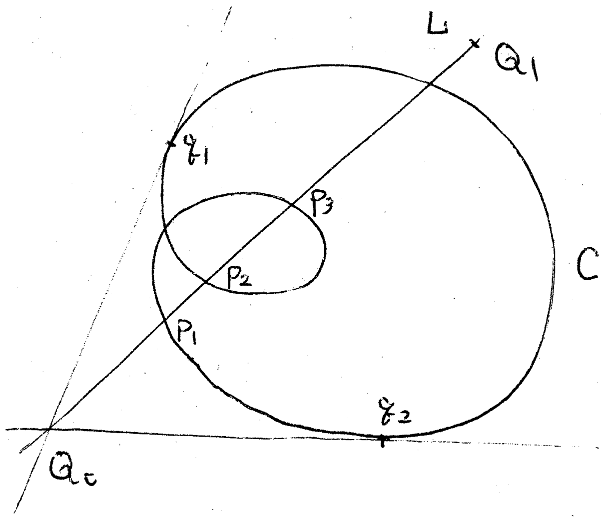
$$\Phi(f,g) = \left[1,\ f - \frac{1}{2}g\left(\frac{df}{dg}\right),\ g,\ \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dg}\right)\right]$$

で定義する時, $\Phi(f,g)$ は horizontal holomorphic map となる 逆にどんな holomorphic horizontal map も上の表現を持つか line $\subset P_3$ への map となっている。

この表現公式を使って主定理を導く。つまりうまく f, g を見つけようということである. さて Φ を M から P_2 への holomorphic, generically 1-1 immersion で $\Phi(M)$ $(=C)$ が ordinary double point のみを singularities にもつ algebraic curve とするものとする。このような Φ の存在は よく知られている。さて Q_0 を P_2 の点で flex tangent, bitangent, double point の tangent の各 line の上になく, L を Q_0 を通り C に接しない, double point を通らない line とする. Q_1 を L上の点,

($\notin Q_0$, $\notin C$) とする そこで $Q_0=[0,1,0]$, $Q_1=[1,0,0]$ とする coordinate をとる。すると $\Psi(p)=[g(p), f(p), 1]$ となる meromorphic function f, g ができる. これが求める f, g であり $\Phi(f, g)$ は holomorphic embedding を与えていることを示せばよい

最後に問題として "genus g の compact connected Riemann surface M に対し M から $S^4(1)$ への immersion の各 regularly homotopy class で minimal immersion を持つものと持たないものを決定する" をあげておく。



Reference については 大仁田氏の Reference を見てください

Super minimal surfaces II

都立大学　江尻　典雄(Ejiri Norio)

Mを compact, connected orientable surfaceとする。MからS $S^3(1)$ への immersion χに対して $W(\chi)$ を

$$\int (H^2 - K + 1) * 1$$

で定義する．ここでHはMの mean curvature, KはMの Gauss curvature, $*1$ は volume element とする。W は Willmore functional と呼ばれている。λ_1, λ_2 をMの主曲率とするとき H^2-K+1 は

$$\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2$$

で与えられる。したがって $W \geqq 0$であり等号は Mが totally umbilicalとなることである。容易に

$$(H^2 - K + 1) * 1$$

は $S^3(1)$の共形変換で不変であることがわかる．
つまり W は 共形不変な量となり $S^3(1)$の曲面の共形幾何をやる1つの出発点となります。 この Willmore functional の Euler Lagrange 方程式は 次で与えられます。

$$\Delta H - 2H(H^2 - K + 1) = 0$$

ここで ΔはMのLaplacianである。この方程式をみたす曲面をWillmore surfaceと呼ぶ。

注. この方程式はHombuによって与えられた。

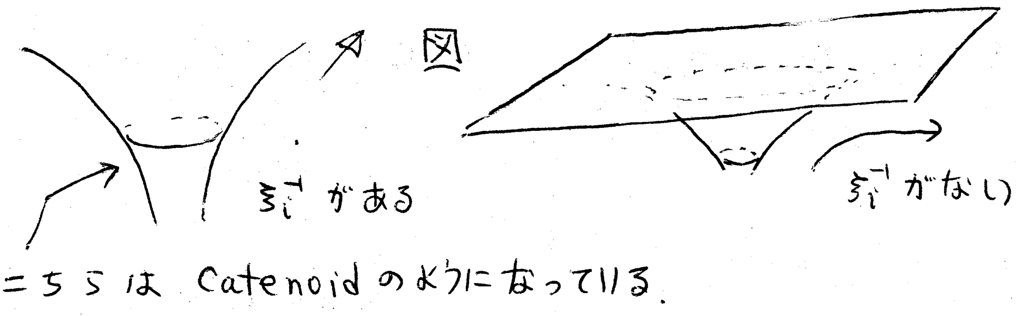
目的はBryantによる次の定理の紹介である([Br-3])。

定理 Mを$S^3(1)$のgenus 0のWillmore surfaceとする。そのときMはR^3のminimal surfaceのstereographic projectionの逆によるsmooth compactificationとなる。

注. smooth compactificationを持つための必要十分条件はBryantによって決定されている. つまりR^3のfinite total curvatureを持つcomplete minimal surface $\tilde{M} = M - \{P_1, \cdots, P_k\}$で$\tilde{x}$をそのimmersionとするとき 各$P_i$のcomplex coordinate ξ_iに対して

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \xi_i} = \xi_i^{-2} v_i + v_i' + \cdots$$

となる. $v_i, v_i' \in \mathbb{C}^3$があることである。実際endがembeddingとならなくてはならないので$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \xi_i}$はorder 2のpoleを持つ. ξ_i^{-1}が現われるかいないかは. 次の図のようになっている.



1. Conformal Gauss map.

$S^3(1)$ の曲面の共形幾何をやりたい。しかし今までの Gauss map は共形不変でない. それは平面は共形変換で sphere に移ってしまうからである(R^3 で考えて)。

Σ を $S^3(1)$ の oriented small spheres の全体とする。M を oriented surface として $S^3(1)$ に immerse されているとする。このとき M の各点 x に対し x で M に接し同じ orientation, 同じ mean curvature vector をもつ small sphere を対応させる。このとき M から Σ への map g が定義できる。容易にわかることは、これは共形不変であるということである。

Σ をどう見るかを考える。

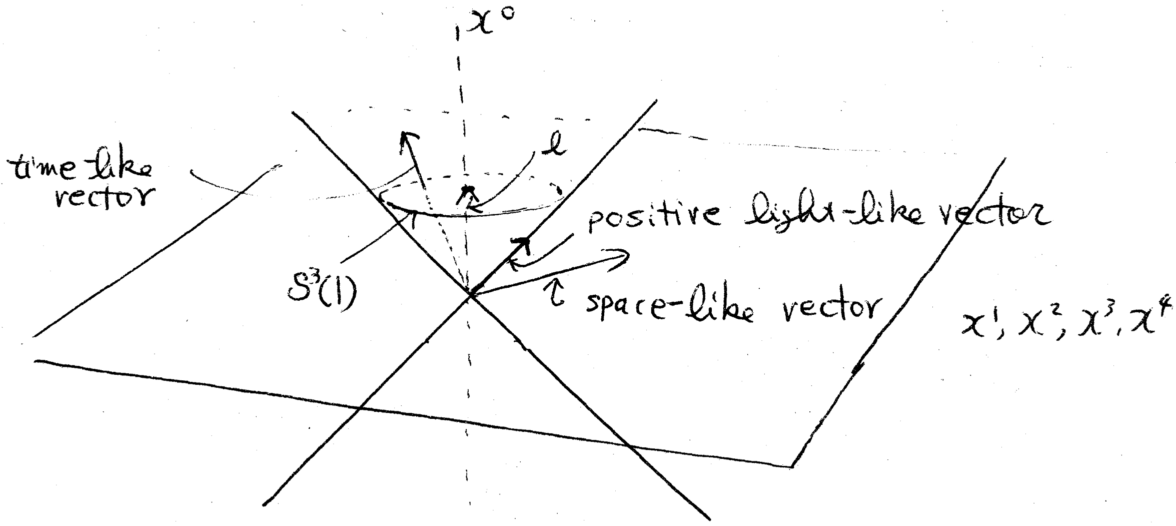
L^5 を 5 次元 Lorentz 空間とする。つまり $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$ を R^5 の orthogonal coordinate として内積を

$$\langle X, Y\rangle = -x^0y^0+x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3+x^4y^4$$

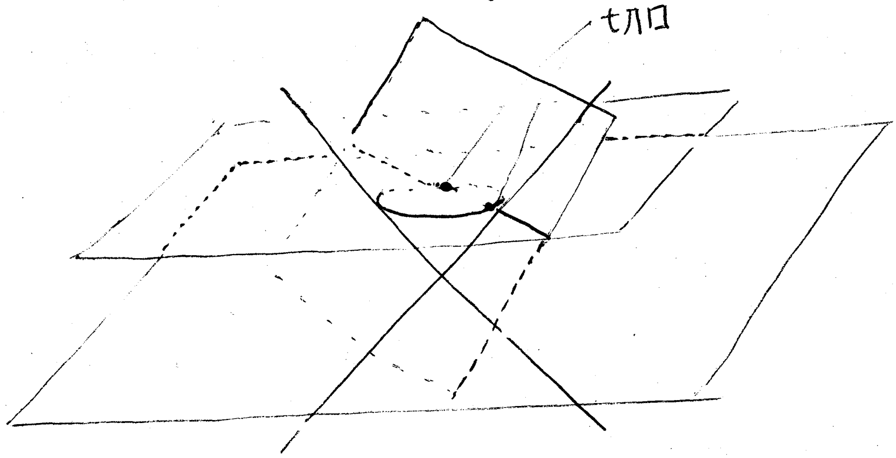
で与えたものである。$S^3(1)$ として

$$\{\, X\in L^5,\ \langle X, X\rangle = 0,\ \langle X, e\rangle = -1 \,\}$$

と考える。ここで $l=(1,0,0,0,0)$ とする。



$S^3(1)$ は positive-light-like ray を一点と見っている。さて $S^3(1)$ の oriented small sphere は L^5 の原点を通る oriented Lorentz hyperplane で切った切口となり この対応は 1:1 onto となる。



L^5 の orientation ($dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 > 0$) とその Lorentz hyperplane の orientation より unit space-like vector が定まる。したがって Σ の各元に対

してこの unit space-like vector を対応させる写像は
Σと 4次元 de Sitter space

$$Q \equiv \{ X \in L^5 ,\ \langle X, X \rangle = 1 \}$$

との同一視を与える。Qは、L^5から induceされる metric (signature $- + + +$)をもつ。したがって$S^3(1)$の oriented surface Mに対して、MからQへの map を得る。これもgであらわすことにする。具体的な表現は次で与えられることがわかる。

$$\begin{array}{cccl} g : & M & \longrightarrow & Q \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & n(x) + \langle \mathcal{L}(x), n(x) \rangle X(x) \end{array}$$

ここで nは unit normal vector of M in $S^3(1)$, $\mathcal{L}$ は Mの mean curvature vector in $S^3(1)$である。さらに$X(x)$は 上の$S^3(1)$のL^5への入れ方における position vector である。次の定理は Bryant によって示されたものである。

定理1.1. (1) gは conformal であり conformal factor は (H^2+1-K) で与えられる。
(2) MがWillmore surface であることとgが harmonic であることは同値。

このgのことを Bryant は conformal Gauss map と呼んでいる。したがって Willmore functionalは、conformal Gauss map の energy (area)となる。注意すべきこと

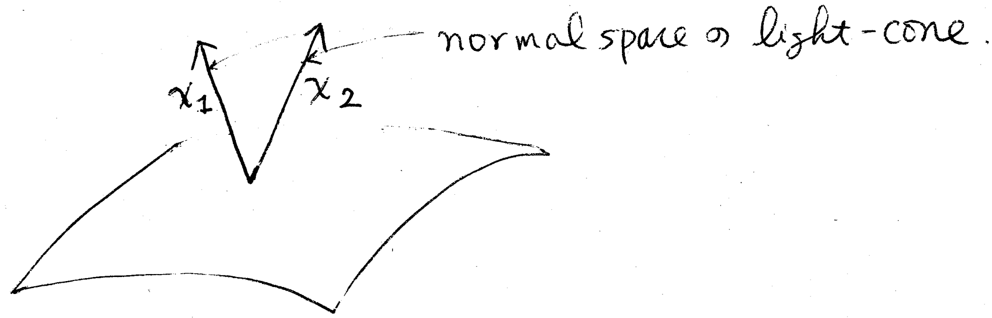
は、umbilic points 以外では g はQの space-like surface を与えていることである。つまり

(1.1) $$g_*(T_xM) \text{ が space-like plane}$$

となっている。

2. Space-like surfaces.

Mを orientable surface とし、g をMからQへの space-like immersion とする。つまり(1.1)が成立している。したがって normal space に導びかれた metric は signature $+\ -$ となる。これよりMとQの orientation を定めると normal space の2つの positive light-like vector が定まる。これらを x_1, x_2 とする

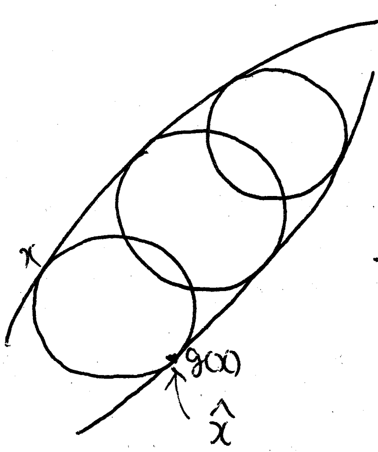


$S^3(1)$ は positive light-like ray を一点と見たものだから x_1, x_2 は $S^3(1)$ への map を定義する。ここでMがQで minimal とは、mean curvature vector が消えていることとすると次が成立する。

補題2.1. もしMが minimal とすると、x_1, x_2 が曲面を与えている部分は Willmore surface でその conformal

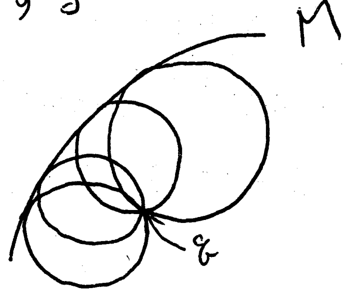
Gauss map は g に他ならない

M を $S^3(1)$ の Willmore surface とする。x をその immersion とし g を conformal Gauss map とする。$\mathcal{U}$ を M の umbilic points 全体とする。g は $M-\mathcal{U}$ を Q の minimal surface として実現している。この曲面の x_1, x_2 にかんして1つは x に他ならない。もう1つを x_2 とするとき x_2 が曲面を与える部分は Willmore surface となる。Bryant は Willmore surface の umbilic points は孤立しており x_2 は $\mathcal{U}$ 上拡張できることを示している。これを M の Willmore dual $\hat{M}$ という ことにする。これの幾何学的意味は次のようになる。



$\hat{M}$ は enveloping surface で mean curvature が対応する点で一致

もっとも simple な場合として $\hat{M}$ が一点となる場合を考える $\hat{M}=\{\xi\}$ とする



π_q を $S^3(1)-\{q\}$ から R^3 への stereographic projection とする。π_q によってこれら small spheres は R^3 の 2-planes となる。$\pi_q(M)$ はこれらの planes に接し同じ mean curvature をもつので $\pi_q(M)$ は minimal surface となる。したがって主定理の証明には genus 0 の Willmore surface S^2 に対して $\hat{S}^2$ が one point であることをいえばよい。

3. Super minimal surfaces.

M を compact, connected Riemann surface とする。g を M から Q への conformal harmonic とする。super minimal surface I と同様にして quartic form P が

$$\left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right\rangle dz^4$$

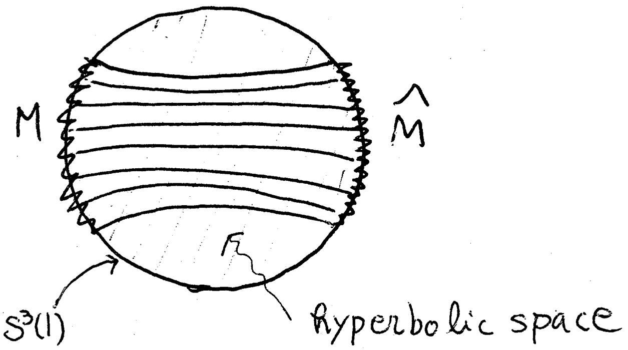
で定義できる. conformal harmonic より P は holomorphic であることがわかる。$P \equiv 0$ となるものを Q の super minimal surface と呼ぶことにする。genus 0 の compact connected Riemann surface からの Q への conformal, harmonic map は super minimal surface を与えることは容易にわかる。さて $S^3(1)$ の genus 0 の Willmore surface を考えると，その conformal Gauss map は，conformal harmonic なので $P \equiv 0$ が成立する。主定理は次の補題より出る。

補題　MがQのsuperminimal surfaceであることと
imageがL^5のdegenerate plane $\{y\}^{\perp}$に含まれることと同値。
ここで y は light-like vector.

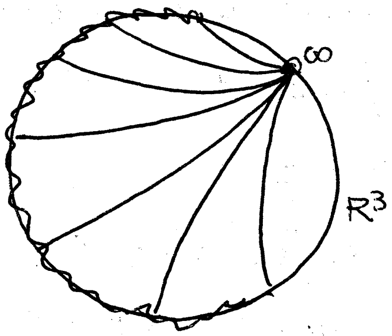
genus 0のWillmore surfaceに対して、$x_2 = y$ に他ならない。ゆえにdualはone pointとなる。

4. dualityの応用.

Mを$S^3(1)$のWillmore surfaceとし$\hat{M}$をWillmore dualとする。$S^3(1)$を4次元hyperbolic spaceのasymptotic boundaryとする。このとき $x \in M$ と対応する $\hat{x} \in \hat{M}$ を結ぶhyperbolic spaceの測地線の集まりで、3次元submanifoldとなっている部分は、type numberが2以下のminimal hypersurfaceとなり、又逆も成立する。



この観点からBryantの結果は次のように読みとれる。
4次元hyperbolic spaceのtype numberが2以下のminimal hypersurfaceのasymptotic boundaryがgenus 0のcompact surfaceであるとき、それは次のようなものにか



注.4.1. このような考え方のもとで 高いcodimensionをもつ Willmore surfaceについては[Ej-5] で与えられている。

Reference については 大仁田氏の Reference を見てください。